

# Die statistische Analyse zum Kartenspiel „Solitär-Spider“

A.F.Peysner

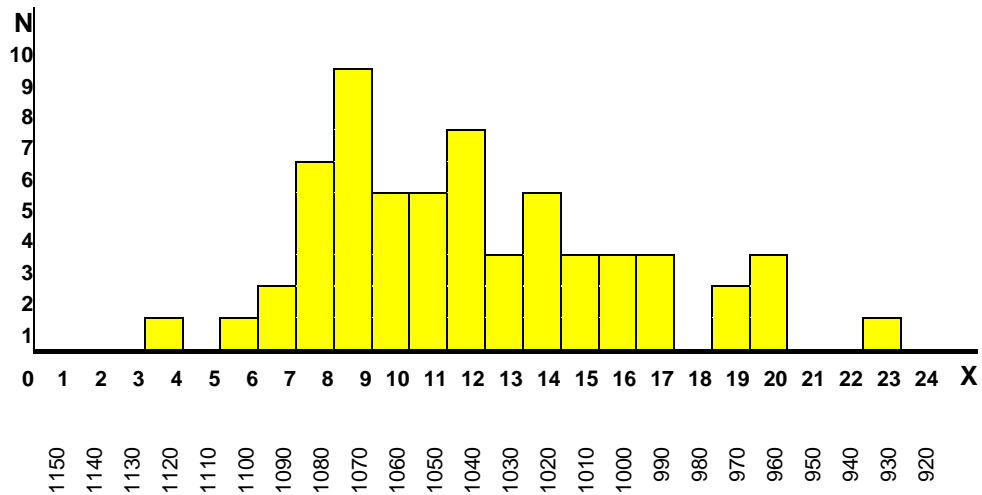
## Vereinbarte Bezeichnungen

N	- eine Menge von gewonnene Spiele oder eine Stichprobe	
T	- eine gesamte Menge von gespielte Spiele oder von Beobachtungen	
$T_v$	- das Anzahl bekommende Verlusten.	
K	- Prozent von Gewinnen in eine gesamte Menge von gespielte Spiele oder Quote	<b>K = N</b>
	: $T A 100%$	(0.1)
$\xi$	- der Erwartungswert oder die Gewichtzentrale von der Stichprobe	
$\xi_m$	- ein Modalwert oder ein Dichtemittel (Anzahl häufigste gewonnene Punkten)	
$\xi_v$	-der Erwartungswert der Anzahlen von beobachtende Verlustfälle	
$\sigma$	- eine Standardabweichung oder ein Standard	
$\sigma_a$	- absolut mittlere Abweichung	
$D_\xi$	- Varianz	
R	- eine Schwankungsintervalle oder Differenz zwischen max. und min Mengen von Punkten pro Spiel	
KI	- eine Konfidenzintervall (erhält 95% Fälle der Stichprobe)	
VI	- eine volle Intervalle oder eine Schwankungsintervalle	
s	- ein Schritt der Stichprobe (Intervalle der Gruppierungen in der Stichprobe)	
Abszisse-Achse „X“	- Größen der Gewinne (von 0 bis zu ca. 1300)	
Ordinaten-Achse „L“	- Anzahl der Fälle mit gleicher Größe der Stichprobe	
$\gamma_2$	- ein Exzess	
$\gamma_1$	- eine Schiefe	
$\mu_r$	- ein Zentralmoment von Ebene „r“	
$\alpha_r$	- ein Anfangsmoment von Ebene „r“	
$K_v$	- Variationskoeffizient	
&	- Pearson Schiefewert	
$\Gamma(\alpha)$	- $\gamma$ -Funktion	
$\Delta x_i$	- eine Breite der i-Intervalle der Gruppierung, alle Intervalle sind gleich.	
$p_i(x)$	-eine Wahrscheinlichkeit des Bekommen in Intervalle $\Delta x_i$	
$n_i$	- ein Anzahl der Fälle in jede Intervalle $\Delta x_i$ (Unterstichprobe)	
C	- Konstante	
$\varepsilon$	- Überlappungsqualität , Überlappungskoeffizient	

Für die Kartenspiel „Solitär-Spider“ wurde ein dauer Test durchgeführt. Als einfachstes Experiment ist einzeln Spiel genommen. Dann wurden aus Gewinnen verschiedene Stichproben mit Gewinnanzahl „N“ genommen und abgerechnet ihre statistischen Charakteristiken. Die Charakteristiken wurden hauptsächlich für gesamte Stichprobe N=400 durchgeführt. Obwohl teilweise wurde die Grafiken und Tabellen für andere Stichprobegröße vorgestellt.

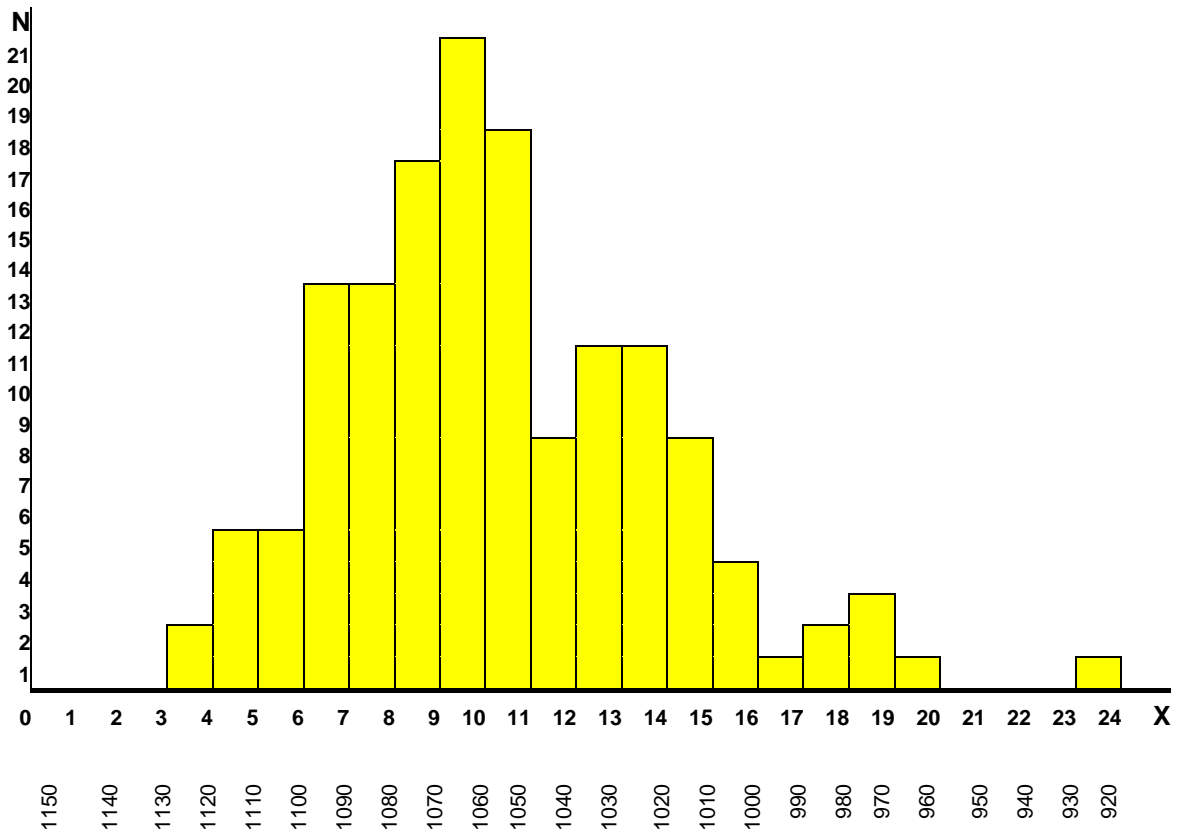
Die Daten wurden nach Gewinngröße sortiert und in Intervalle mit Abstand 10 gruppieren.

Die Stichprobe 1 hat mit N=64 kein interessante Daten mitgebracht, weil zu klein gewesen. Aber wurde weiter zusammen mit zwei andere Stichproben in Gesamte Stichprobe mit N=400 mitgerechnet.



**Graphik 0.1**  
**Stichprobe 1 (2007)**

Stichprobe 1	-	N = 64	$\xi = 1040,$	$\xi_m = 1070$
Stichprobe 2	-	N = 144	$\xi = 1050,$	$\xi_m = 1060$
(siehe Tabelle 0.1 und Graphik 0.2)				
Stichprobe 3	-	N = 192	$\xi = 1050,$	$\xi_m = 1080$
(siehe Tabelle 0.1 und Graphik 0.3)				



**Graphik 0.2**  
**Stichprobe 2 (2008)**

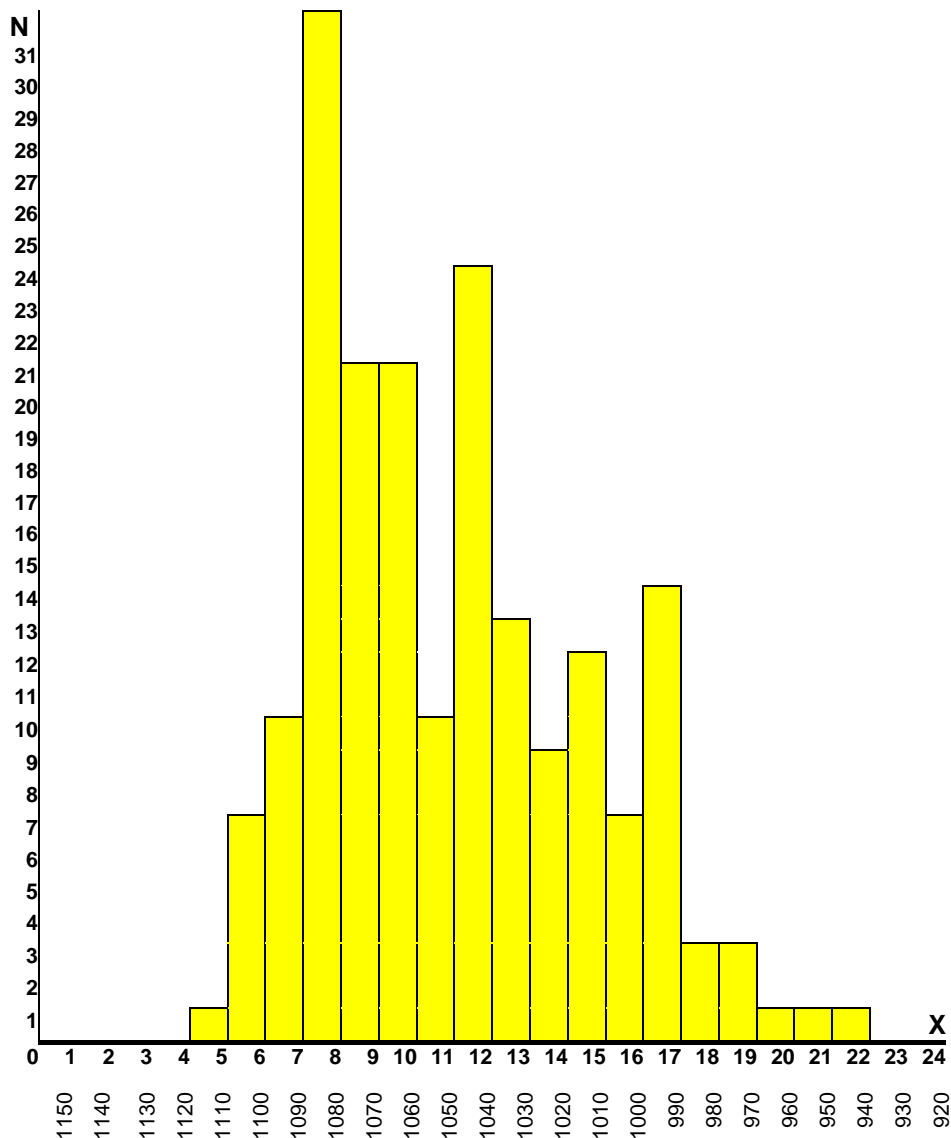
Nachfolgend sind 3 Modalwerte der Graphiken von Stichproben 1 und 2 aufgeführt:

Stichprobe 1	$\xi_{m1}=1070,$	$\xi_{m2}=1040$	und	$\xi_{m3}= 960$	, an N = 64
Stichprobe 2	$\xi_{m1}=1060,$	$\xi_{m2}=1020$	und	$\xi_{m3}= 970$	, an N = 144
Stichprobe 3	$\xi_{m1}=1080,$	$\xi_{m2}=1040$	und	$\xi_{m3}= 990$	, an N = 192

und entsprechende Zusammenfassung für N=400:

$\xi_{m1}=1080,$   $\xi_{m2}=1040$  und  $\xi_{m3}= 990$  .

Wir bekommen eine multimodale Verteilung, die unabhängig von der Gruppierung der Stichprobe bleibt (Tabelle 0.1 und Graphik 1.1).



**Graphik 0.3**  
**Stichprobe 3 (2009)**

Es wurde überprüft, warum Grafiken 3 Spitze haben, ob es ein Zufall (z.B. die Menge von Stichproben zu gering gewesen) oder rechtmäßig ist. Dann wurde festgestellt, dass die jede Stichprobe man als die Summe von 3 Unterstichproben mit eigenem Modalwert vorgestellt kann.

Der erste Modalwert (der größte):

ist ganz normaler (einfachster) Fall, der Modalwert verschiebt sich mit der Erfahrung in die Richtung eines Inkrementierens der Variable „X“.

Der zweite Modalwert :

zeigt Fälle, bei denen aufgrund subjektiver Gründe, wie Müdigkeit, Unaufmerksamkeit, das Auftreten von Gewinnen in komplizierteren Spiele usw., Punkte verlorengeht.

Der dritte Modalwert:

tritt auf mit wachsender Erfahrung (einem Anstieg der Menge an Gewinnen aus prinzipiell mehreren komplizierten Spielfällen).

Der dritte Modalwert verschiebt sich auch, wie die Erste, mit dem Wachsen der Stichprobe, in Richtung eines Anstiegs von "X" und verschwindet mit großem Stichprobenwachs. Der zweite Modalwert bewegt sich, wie es der weitere dem Stichprobenwachs gezeigt hatte, in Richtung des ersten

<b>Z<sub>i</sub></b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>N</b>	Stichprobe 1	Stichprobe 2	Stichprobe 3
1150	1	0	0	0	0
1140	2	0	0	0	0
1130	3	0	0	0	0
1120	4	5	3	2	0
1110	5	7	1	5	1
1100	6	13	1	5	7
1090	7	25	2	13	10
1080	8	<b>51</b>	6	13	<b>32</b>
1070	9	47	<b>9</b>	17	21
1060	10	47	5	<b>21</b>	21
1050	11	35	7	18	10
1040	12	<b>40</b>	<b>7</b>	9	<b>24</b>
1030	13	27	3	11	13
1020	14	25	5	<b>11</b>	9
1010	15	22	3	7	12
1000	16	14	3	4	7
990	17	<b>18</b>	3	1	<b>14</b>
980	18	5	0	2	3
970	19	8	2	<b>3</b>	3
960	20	5	<b>3</b>	1	1
950	21	2	0	0	2
940	22	2	0	0	2
930	23	1	1	0	0
920	24	1	0	1	0
		<b>400</b>	<b>64</b>	<b>144</b>	<b>192</b>

$\xi =$		<b>12</b>	<b>11</b>	<b>11,5</b>
$\xi_{m1} =$		<b>9</b>	<b>10</b>	<b>8</b>
$\xi_{m2} =$		<b>12</b>	<b>14</b>	<b>12</b>
$\xi_{m3} =$		<b>20</b>	<b>19</b>	<b>17</b>
$\sigma^2 =$		<b>15,864</b>	<b>12,688</b>	<b>13,734</b>
$\sigma =$		<b>3,983</b>	<b>3,562</b>	<b>3,706</b>

**Tabelle 0.1**  
**Stichprobe pro Fall**

Modalwertes und fließt mit ihm zusammen.

Der Erwartungswert bleibt damit praktisch ohne Änderung. Dies ist durch bessere Entscheidungen in mittelschwierigen Fällen auf der einen Seite, und Gewinnen von schwierigen Fällen auf der anderen Seite (Varianz wächst) bedingt.

Bei starker Vermehrung von Stichprobe verliert der subjektive Faktor an Bedeutung und bestrebt die Stichprobe von Multimodal zum Unimodal Fall.

In Graphik 1.1 kann man sehen, dass die Variable von oben (von rechts) streng begrenzt ist, bei maximal möglicher (theoretisch mögliche) Punktemenge pro Spiel

$$X_{\max} = 100 \times 8 + 500 - 13 \times 8 = 1196,$$

doch real ist

$$X < 1130.$$

Von links kann die Variable "X" bis zu "0" (praktisch ohne Limit) dekrementiert werden. In unserer Stichprobe ist das

$$X > 910.$$

Es ist klar, dass die direkte Anwendung einer beliebigen Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichte schwierig genug ist. Deshalb soll man, für weitere Bearbeitung, der Daten rund um die Ordinaten-Achse eine Spiegelung reichen (Gewinne-Anzahl). Als „0“ auf der X-Achse (Gewinngröße) nimmt man Größe „1150“, mit einem Abfall nach „920“ (unbegrenzte Steigerung). An der Y-Achse können die Daten von „0“ unbegrenzt steigen. Die Tabelle 0.1 zeigt die, nach der Spiegelung, gewonnenen Daten am N=400.

Für eine vereinfachte Ausführbarkeit der Datenbearbeitung wird die Variable- Änderung:

- das Intervall zwischen 1150 und 920 wird auf Unterintervalle mit des Schrittweite  $s=10$  aufgeteilt. Man erhält so  $R=24$  Unterintervalle, (Schwankungsintervalle aus der Stichprobe-Graphik)
- alle in der Stichprobe gewonnene Daten werden abgerundet bis zur vollen 10 in verkleinere Richtung.
- gerundete Daten werden zu Unterintervallen zugeordnet
- diese Zehner-Intervallen werden auf eine Schrittweite von  $s=1$  komprimiert.

Wenn die originale Variable Z (Gewinngröße) zwischen

$$1150 > Z > 920 \quad (\text{Schrittweite } s=1) \text{ liegt,}$$

so ist die neue Variable

$$X = (1150 - Z)/10$$

im Bereich

$$0 < X < 24, \quad (\text{Schrittweite } s=1).$$

Die neuen Daten befinden sich in die Tabelle 1.2 und der Graphik 1.2.

Die bearbeitete Stichprobe hat nächste Parameter:

Modalwert	$\xi_m = 8$	(1080)	und
Erwartungswert	$\xi = 11$	(1050).	

Wir betrachten ein Konfidenzintervall  $KI=15$  von 4 (1130) bis zu 18 (970). Nur 19 Fälle befinden sich außerhalb von diesem Intervall. Das sind 5% (4,75%) der ganze Stichprobe (N = 400).

Für die Approximation sind die wichtigsten Voraussetzungen:

1. Verteilungsmittelpunkt / Erwartungswerte sollten gleich sein
2. Flächengröße von einer approximierenden Funktion und von der Stichprobe sollen auch

gleich sein.

3. Die Flächenformen und ihre Größen müssen maximal kongruieren.  
Eine Approximation ist sehr gut, wenn die Überlappung der Flächen 95% und mehr ist.  
Der normierte Koeffizient "C" ordnet die Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion zum Stichprobenvolumen zu.

$$(0.2) \quad L = C \cdot f(x)$$

Es wird angenommen:

- die Karten sind im Spiel zufällig verteilt (obwohl ist es nicht ganz richtig, da der Prozess des Verteilens von Karten am PC mit Zahlgenerator produzieren und abhängig von laufende Zeit).

- die Stichprobe hat eine unimodale Verteilung (dies ist auch nicht ganz richtig, siehe oben).

## 1.1 Die Stichprobe

Jede einfachste Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichten ist über ihre Grund- und Zentralmomente eingestellt, wenn sie alle existieren und läuft die Summe von der Reihe (F.1.1) zusammen.

$$(1.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| f/k! \quad , \quad \text{dabei} \quad f = s^k \quad \text{und} \quad s = 1 \quad \text{sind.}$$

Wir haben ein begrenzten Intervall (K=24). Ein Potenzfunktion (F.1.1) steigt langsamer als eine Fakultät. Folglich streben die Glieder von Reihe (F.1.1) gegen „0“, „k -> ∞“. Die Reihe läuft zusammen.

Die Momente können mit den nachfolgenden Formeln berechnet werden:

Grundmomente oder Momente ([L2], S.547, §18.3-7, F.18.3-17)

$$(1.2) \quad \alpha_k = \sum_{i=1}^K x_i^k A p_i(x) \quad \text{und}$$

Zentralmomente ([L2], S.547, §18.3-7, F.18.3-18)

$$(1.3) \quad \mu_k = \sum_{i=1}^K (x_i - \xi)^k A p_i(x) \quad .$$

Manchmal trifft man in der Quelle absolute Momente ( [L3], S.29, §1.6.3), oder absolute Zentralmomente ( [L4], S.88, §3.3):

$$(1.4) \quad \mu_{|k|} = \sum_{i=1}^N |x_i - \xi|^k p_i(x)$$

Die statistischen Momente der Stichprobe wurden in Tabelle 1.1 angeordnet.

Die nächsten Charakteristiken sind für jede Stichprobe am wichtigste:

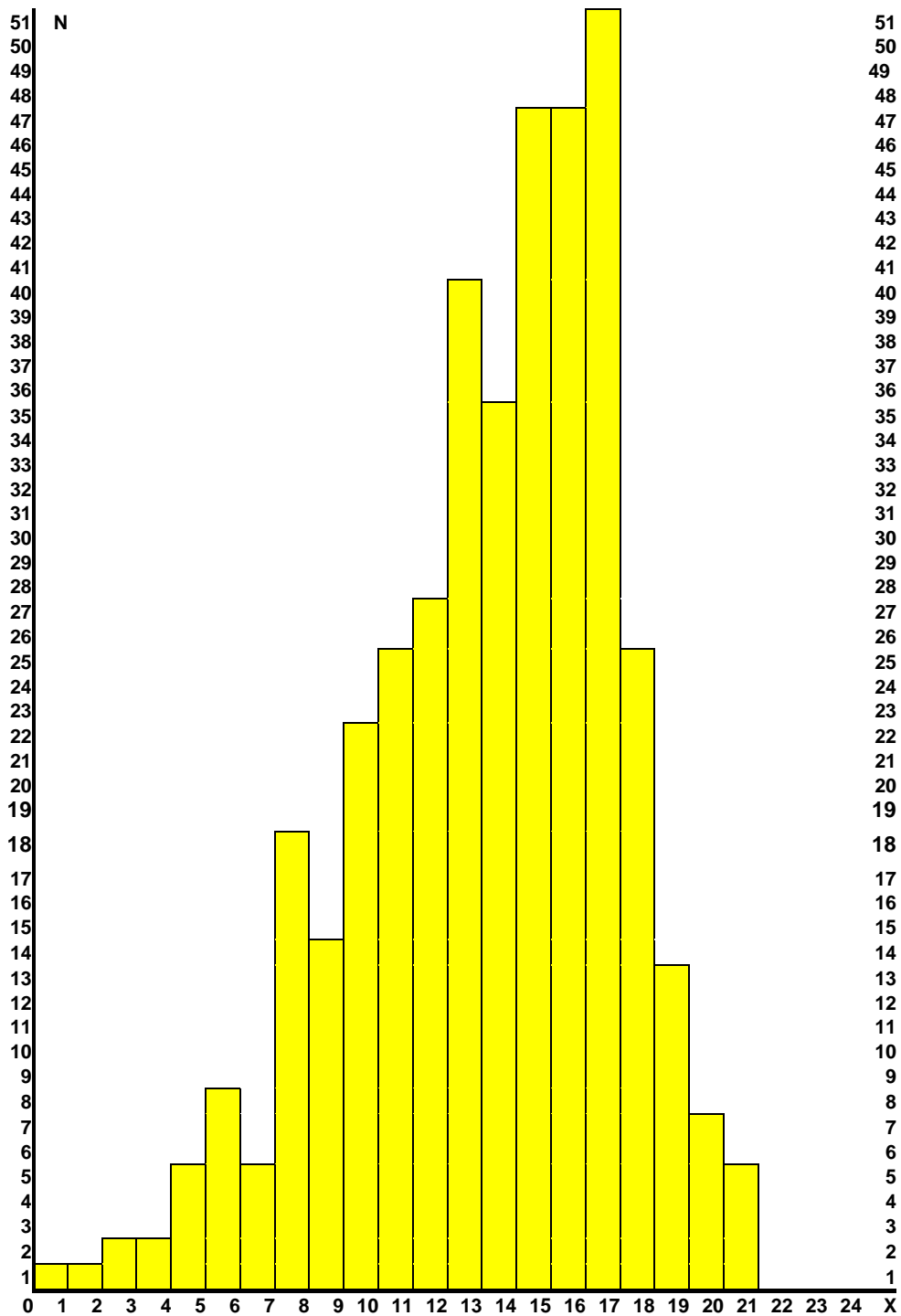
### Die Positionscharakteristiken

Erwartungswert [L3, S.27, §1.6.2] und [L1, S.151, §5.2.1, F.5.11]

$$(1.5) \quad \xi = \sum_{i=1}^N (n_i / N) x_i = \sum_{i=1}^N (p_i x_i)$$

Modalwert

$$(1.6) \quad \xi_m = x_j \quad \text{am} \quad \max (n_i / N)$$



Graphik 1.1  
Die original Stichprobe

### Die Abweichungscharakteristiken

Die absolute Mittelabweichung vom Mittelwert ist:

$$(1.7) \quad \sigma_a = \sum_{i=1}^N p_i |x_i - \xi|$$

Varianz [L3, S.29, §15.6.4]

$$(1.8a) \quad D_\xi = \sum_{i=1}^n p_i A x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n p_i A x_i \right)^2$$

Grund-Momente	P(x <sub>i</sub> )	ξ	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>
	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>
	1	11,13	140,94	1933,6	28786

Zentral Momente	P(x <sub>i</sub> )	m <sub>1</sub>	D <sub>ξ</sub>	m <sub>3</sub>	m <sub>4</sub>
	m <sub>0</sub>	m <sub>1</sub>	m <sub>2</sub>	m <sub>3</sub>	m <sub>4</sub>
	1	0	13,814	33,002	599,66

Absolute Zentral-Momente	P(x <sub>i</sub> )	σ <sub>a</sub>	D <sub>ξ</sub>	m <sub>(3)</sub>	m <sub>(4)</sub>
	m <sub>(0)</sub>	m <sub>(1)</sub>	m <sub>(2)</sub>	m <sub>(3)</sub>	m <sub>(4)</sub>
	1	0	13,814	82,7978	599,66

Tabelle 1.1  
Momente der Stichprobe

oder [L1, S.152, § 5.2.2, F.5.14]

$$(1.8b) \quad D_\xi = \sum_{i=1}^n p_i A (x_i - \xi)^2$$

Standardabweichung (Standard)

$$(1.9) \quad \sigma = \text{wurzel}(D_\xi ; 2)$$

Variationskoeffizient [L1, S.72, §3.3.2.1, F.3.20]

$$(1.10) \quad K_v = \sigma / \xi$$

### Die Charakteristiken von Schiefe und Exzess

Schiefe [L1, S.154, F. 5.21]

$$(1.12) \quad \gamma_1 = [ \sum (p_i A |x_i - \xi|^3) ] / \sigma^3$$

Exzess (Wölbung / Steilheit) [L1, S.155, F. 5.22]

$$(1.13) \quad \gamma_2 = [ \sum (p_i A |x_i - \xi|^4) ] / \sigma^4 - 3$$



Pearson Schiefewert ([L.2], S.545, §18.3-3.)

$$(1.14) \quad \xi = (\xi - \xi_m) / \sigma$$

Die Statistischen Hauptcharakteristiken der Stichprobe (Varianz, Erwartungswert usw.) sind in **Tabelle 1.2** dargestellt.

Charakteristiken die Schiefe und Exzess kann man (siehe [L.1], S.156), so interpretieren:

- $\gamma_1 > 0$  - linkssteile Verteilung  $\xi > \xi_m$
- $\gamma_1 = 0$  - symmetrische Verteilung  $\xi = \xi_m$
- $\gamma_1 < 0$  - rechtssteil Verteilung  $\xi < \xi_m$
- $\gamma_2 < 0$  - Verteilung platykurtisch ( flach gewöbelt),
- $\gamma_2 = 0$  - Verteilung mesokurtisch ( mittelmäßig gewöbelt),
- $\gamma_2 > 0$  - Verteilung leptokurtisch ( stark gewöbelt).

$\xi$	$\xi_m$	$D\xi$	$\sigma$	$K_v$	$\sigma_a$	R	KI	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\xi$
11	8	13,81	3,72	0,338	2,96	24	15	0,643	0,14	0,81

**Tabelle 1.2**  
**Die wichtigsten statistischen Charakteristiken der Stichprobe**

Im unseren Fall hat man:

$$\xi_m = 8 > 0 ; \quad \xi = 11 > 0 \Rightarrow \quad \xi_m < \xi \quad \text{und} \quad \gamma_1 = 0,643 > 0,$$

eine eben linkssteile Verteilung.

Man kann bemerken, dass der Variationskoeffizient  $K_v$  bei uns

$$K_v = 3,72/11 = 0,338 \quad \text{ist.}$$

Laut [L1, S.205]:

Wenn  $K_v > 0,33$  ist, dann für solche Stichproben eine Lognormalverteilung von Wahrscheinlichkeitsdichte (LNWD) optimal werden.

### 1.2 Approximation der Lognormalverteilung

Die Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichte der Lognormalverteilung zeigt die Formel (2.1), ([L.1], S.206, F.5.105 und [L.3], S.129, §6.3.14):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} f(x) &= (\lambda x \sqrt{2\pi})^{-1} e^{-[\ln(x) - m]^2 / 2\lambda^2} , \text{ bei } x > 0 \\ f(x) &< 0 , \text{ bei } x \leq 0 \end{aligned}$$

#### Die Positionscharakteristiken

Erwartungswert ([L.1], S.206, F.5.106)

$$(2.2) \quad \xi = \exp(m + 0,5 \lambda^2)$$

Modalwert ([L.1], S.206, F.5.106)

$$(2.3) \quad \xi_m = \exp(m - \lambda^2)$$

#### Die Charakteristiken der Abweichungen

Charakteristische Momente [L.3, S.129]

$$(2.4) \quad M_\xi^k = \exp \{0,5k^2 \lambda^2 + km\}$$

Varianz [L.3, S.129] und [L.1, S.206, F.5.105]

$$(2.5) \quad D_\xi = \exp(\lambda^2 + 2Am)A[\exp(\lambda^2) - 1]$$

Standardabweichung (Standard)

$$(1.9) \quad \sigma = \sqrt{D_\xi}$$

Absolute Mittelwertabweichung

$$(1.6) \quad \sigma_a = \sum_{i=1}^N p_i |x_i - \xi|$$

Variationskoeffizient

$$(1.10) \quad Kv = \sigma/\xi$$

#### Die Charakteristiken von Schiefe und Exzess

Schiefe ([L.3], S.129)

$$(2.7) \quad \gamma_1 = [\exp(\lambda^2) + 2] A [\exp(\lambda^2) - 1]^{0,5}$$

Exzess ([L.3], S.129)

$$(2.8) \quad \gamma_2 = \exp(4\lambda^2) + 2\exp(3\lambda^2) + 3\exp(2\lambda^2) - 6$$

hier „m“ und „λ“ sind Parameter der Verteilung.

Pearson Schiefewert [L.2, S.545]

$$(1.13) \quad \& = (\xi - \xi_m)/\sigma$$

LNWD hat in den Intervallen von 0 bis 24 am Schritt 1 sehr kleine Bedeutungen. Wir brauchen nur die Anzahl der Intervalle und keine ihre absolute Größe, deshalb kann man noch weitere Vereinfachungen machen.

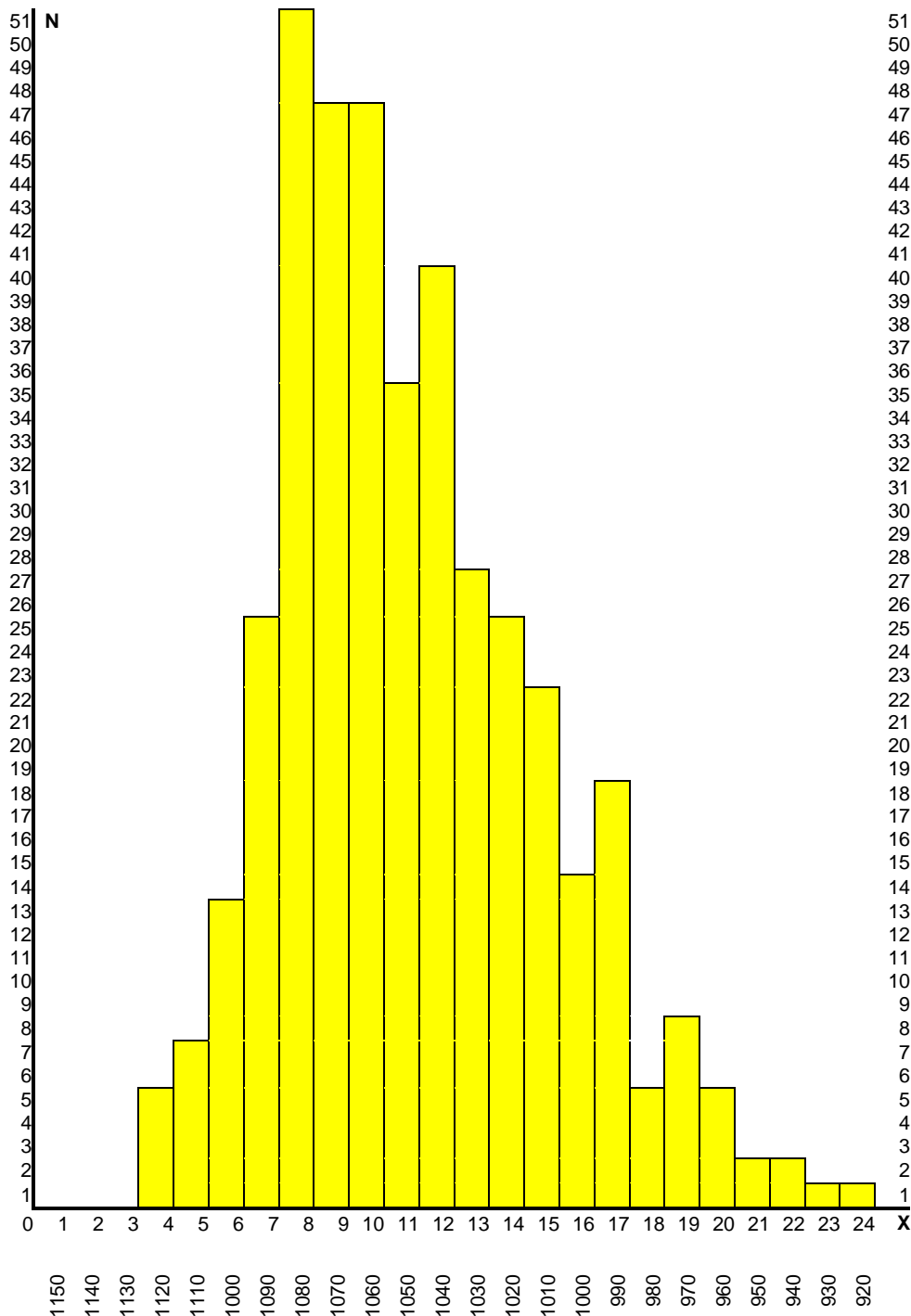
#### Erste Variante:

Tauscht man die Variable ein, und beginnt bei  $X = 0,4$  am Schrittweite  $s = 0,2$ . Man nimmt  $R = 24$  Intervalle.

Die wichtigsten Charakteristiken der Stichprobe sind in **Tabelle 2.1** zugeordnet. Im vollen Intervall „VI“ sind 29 Punkten unbedeckte geblieben. Das sind ca. 7,0 % von der gesamten Stichprobe.

In voll Intervall ist Überlappungskoeffizient  $\varepsilon = 92,75\%$  und

Im Konfidenzintervall „KI“  $\varepsilon = 93,18\%$ .



**Graphik 1.2**  
**Gespiegelte Stichprobe**

Das Ergebnis ist nicht schlecht, obwohl in 4-te Unterintervall die Stichprobe Relevanz „5“ hat, aber LNWD nur „2“ ist. Im unseren Fall ist Komprimierung von linke Seite nicht erwünscht. Die Parameter

der Verteilung sind:

$$\lambda=0,3, \quad m=0,85, \quad \xi=2,4355 \quad (11), \quad \xi_m = 2,2 \quad (10), \quad \text{und} \quad C = 80,3.$$

Die originale Stichprobe hat eine steilere Linkssteile und flach gewölbt von rechts. Eine Korrektur der Stichprobe (Modalwerte verschieben in 12-te, 17-te und 19-te Unterintervalle nach links), bringt keine praktische Verbesserung der Approximation.

Im vollen Intervall ist der Überlappungskoeffizient  $\varepsilon = 93,50\%$  geworden,

Im Konfidenzintervall „KI“  $\varepsilon = 93,44\%$ .

	$\xi$	$\xi_m$	$D_\xi$	$\sigma$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\&$	Kv	$\sigma_a$	KI	R
<b>Ln</b>	<b>2,436</b> <b>(11)</b>	<b>2,2</b> <b>(10)</b>	<b>0,52</b> <b>(13)</b>	<b>0,721</b> <b>(3,60)</b>			<b>0,327</b>	<b>0,296</b>	<b>0,57</b> <b>(2,85)</b>	<b>15</b>	<b>24</b>
<b>Ln<sub>t</sub></b>	<b>2,447</b>	<b>2,138</b>	<b>0,564</b>	<b>0,751</b>	<b>0,95</b>	<b>1,645</b>	<b>0,412</b>	<b>0,307</b>		<b>15</b>	<b>24</b>
<b>N</b>	<b>11</b>	<b>8</b>	<b>13,81</b>	<b>3,72</b>	<b>0,643</b>	<b>0,14</b>	<b>0,81</b>	<b>0,338</b>	<b>2,96</b>	<b>15</b>	<b>24</b>

**Tabelle 2.1**  
**Wichtigste Charakteristiken der Lognormalverteilung**

In Tabelle 2.1 sind auch die Daten von wichtigsten Charakteristiken von LN<sub>N</sub> (**Ln**) und theoretische Daten für einen Fall ohne Rundungen von Stichprobeelementen (**Ln<sub>t</sub>**) zu vergleichen gegeben. Die Abweichung für **Ln** und **Ln<sub>t</sub>** bildet:

für den Erwartungswert  $\Delta_\xi = 2,81\%$ ,  
 für die Standardabweichung  $\Delta_\sigma = 4,18\%$ ,  
 für den Variationskoeffizient  $\Delta_{kv} = 3,68\%$ ,  
 für den Pearson Schiefewert  $\Delta_\& = 25,97\%$ .

**Zweite Variante:**

Beginnt man bei  $X = 0,16$  mit einer Schrittweite  $s = 0,32$ . Man nimmt ebenfalls den Intervallanzahl  $R = 24$ . Die Parameter der Verteilung sind:

$$\lambda=0,37, \quad m=1,04, \quad \xi=3,03 \quad (10), \quad \xi_m = 2,47 \quad (8), \quad \text{und} \quad C = 128 .$$

Im vollen Intervall ist der Überlappungskoeffizient  $\varepsilon = 84,25\%$ .

Im Konfidenzintervall „KI“ ist  $\varepsilon = 85,83\%$ .

- Erwartungswert ist um 1 Schritt nach links verschoben  $\xi = 10$ .
- Die Modalwerte sind gleich  $\xi_m = 8$ .

Rein Theoretisch kann man subjektive Faktoren von  $N \rightarrow \infty$  nicht akzeptieren.

In **Tabelle 2.2** und in **Graphik 2.1** (erste Variante) wurde Approximationsvergleich der LN<sub>N</sub>-Dichte (**Ln**) mit der Stichprobe (**n<sub>i</sub>**) gemacht.

In **Tabelle 2.3** wurde ein Beispiel von der Erhöhung Stichprobegröße bis zu  $N=479$  mit der LN<sub>N</sub>-Approximation an Variante 1 vorgestellt. Der Konfidenzintervall wächst damit auf  $R_K=16$ , und umfasst 95,62% der Stichprobe.

$n_i$	0	0	0	5	7	13	25	51	47	47	35	40	27	25	22	14	18	5	8	5	2	2	1	1	VI	KI	Var.1
Ln	0	0	0	2	7	18	30	40	47	48	44	39	32	25	19	14	11	8	5	4	3	2	1	1			
$\Delta$	0	0	0	3	0	0	0	11	0	0	0	1	0	0	3	0	7	0	3	1	0	0	0	0	29	25	

$n_i$	0	0	0	5	7	13	25	51	47	47	35	40	27	25	22	14	18	5	8	5	2	2	1	1			Var.2
Ln	0	0	1	5	18	35	47	52	51	45	37	29	22	17	12	9	6	4	3	2	2	1	1	1			
$\Delta$	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	11	5	8	10	5	12	1	5	3	0	1	0	0	63	54		

**Tabelle 2.2**  
Approximation von Lognormalverteilung (Ln)

$n_i$	0	0	0	5	8	15	29	54	51	50	42	50	34	33	31	16	22	8	10	7	8	2	2	2	479	VI	KI
Ln	0	0	0	2	9	21	36	49	56	57	53	46	38	30	23	17	13	9	7	5	3	2	2	1	479		
$\Delta$	0	0	0	3	0	0	0	8	0	0	0	4	0	3	8	0	9	0	3	2	5	0	0	1		46	38
$X_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Nr.	интер.	

**Tabelle 2.3**  
Erweiterung der Approximation-Verteile  
nach gestiegene Stichprobgröße (N=479)

### 3. Entwicklungsdynamik der Stichprobe

: Die **Tabelle 3.0** enthält den Verlauf des Stichprobeparameters über Wachstum der Stichprobgröße. Dabei schreitet das Dispersionswachstum fort. Der Abstand zwischen Erwartungswert und Modalwert wächst. Der Erwartungswert verschiebt sich um mehr als 5% nach rechts. Im Ergebnis wächst der Variationskoeffizient  $K_v$ . Die Stichprobe strebt gegen die echte LNWD. Durch das Wachstum der Stichprobe wächst der Unterschied zwischen ihr und der LNWD mit angenommenen Parametern. Der Überlappungskoeffizient ( $\epsilon$ ) nimmt ab. Dispersion  $D_\xi$  natürlich wächst. Die Schätzung der Verschlechterung von der Approximation wurde in **Tabelle 3.1** gezeigt. In der Tabelle wurden auch Vergleiche der korrigierten Stichproben gegeben, wo scharfe Aufstiege (neben Modalwerte) so verschoben wurden, damit die Stichprobe Unimodal wird (ohne Nebenspitze). Die Stichprobe weist 2 starke Ausfälle auf, diese wurden nicht Berücksichtigt. Das Wachstum der Stichprobe auf 19,75% nach Variante1, bringt eine Verschlechterung vom Überlappungskoeffizient

Im vollen Intervall auf - 1,73%  
Im Konfidenzintervall auf - 1,12%.

N	$\xi$	$\xi_m$	$D_\xi$	$\sigma$	$\sigma_a$	R	$K_v$	$\epsilon$
500	11,79 (12)	8	17,56	4,19	3,24	28	0,355 0,349	0,90 0,955
481	11,73 (12)	8	16,90	4,11	3,17	28	0,350 0,343	0,91 0,973
400	11,13 (11)	8	13,81	3,72	2,96	24	0,334 0,338	0,84 0,806

**Tabelle 3.0**  
Verlauf des Stichprobeparameters  
am Wachstum der Stichprobgröße

Das Wachstum der Stichprobe auf 19,75% nach Variant2, bringt das Verschlechtern vom Überlappungskoeffizient:

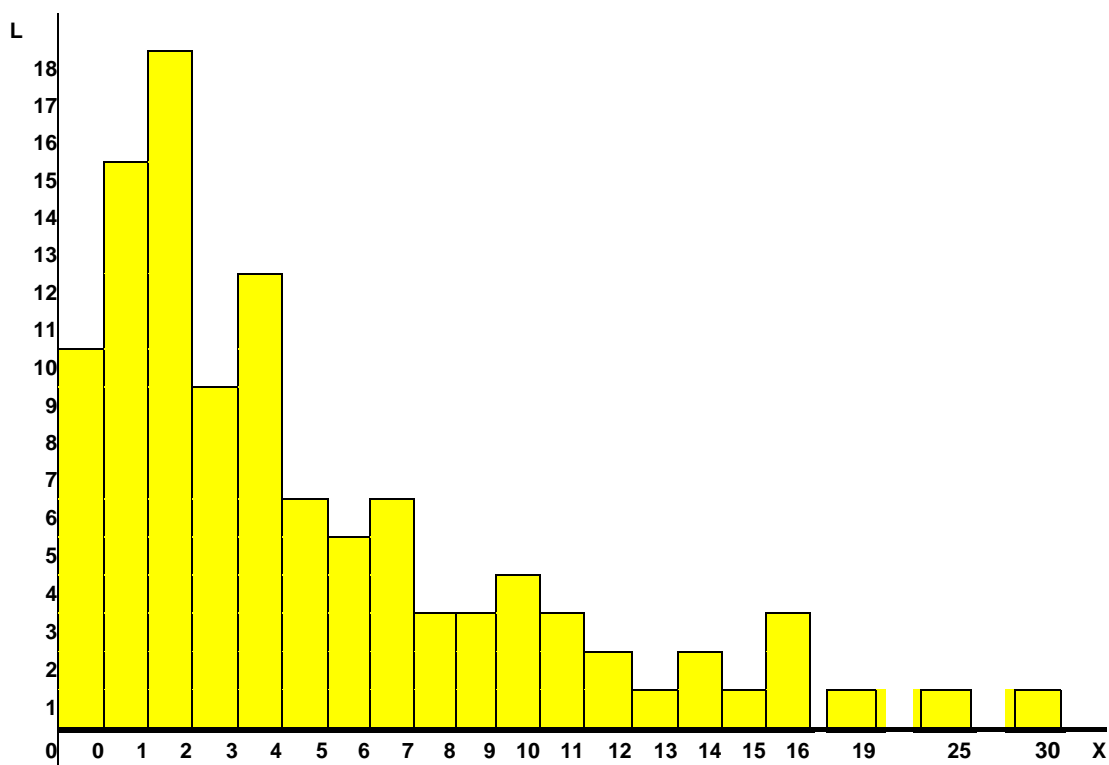
Im vollen Intervall	auf	- 3,87%
Im Konfidenzintervall	auf	- 3,52%

Die korrigierte Stichprobe (nach Variante 1) hat am Wachstum der Stichprobegröße im Konfidenzintervall eine kleine Verbesserung der Approximation auf 0,25%.

Diese Verschlechtern passiert wahrscheinlich, weil ein kleiner Stichprobenzuwachs die Daten nicht vorgesagte (spontan) bringt, aber die LNWD ist stark von den angenommenen Parametern abhängig.

#### 4. Beschluss

Die Stichprobe hat noch einen sehr interessanten Parameter und zwar eine Wechselbeziehung zwischen Gewinnen und Verlusten. Die **Tabelle 4.1** zeigt die Anzahl der Verlusten „ $T_v$ “ zwischen zwei aufeinander folgenden Gewinnen.



**Graphik 4.1**  
Verlustanzahl „ $T_v$ “ zwischen 2 benachbarten Gewinnen

Der Erwartungswert der Verluste „ $T_v$ “ zwischen 2 benachbarten Gewinne für  $N=106$  letzte Gewinne ist:

$$\mu_t = 4,84$$

Die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit des Gewinnes beträgt:

$$p_{ds} = 17,12\%$$

Erwartungswert des Verlustes  $T_v$  zwischen 2 benachbarten Gewinnen für  $N= 479$  Gewinne:

$$\mu_t = 9,15$$

Prozent	Interwalle	Anzahl	Interwalle	Anzahl
<b>bis 3%</b>	<b>25 - 29</b>	<b>2</b>	<b>25 - 29</b>	<b>2</b>
<b>bis 4%</b>	<b>20 - 24</b>	<b>0</b>	<b>20 - 24</b>	<b>0</b>
<b>bis 5%</b>	<b>15 - 19</b>	<b>2</b>	<b>15 - 19</b>	<b>5</b>
<b>bis 7%</b>	<b>10 - 14</b>	<b>10</b>	<b>10 - 14</b>	<b>12</b>
<b>bis 10%</b>	<b>5 - 9</b>	<b>18</b>	<b>5 - 9</b>	<b>23</b>
<b>bis 20%</b>	<b>0 - 4</b>	<b>36</b>	<b>0 - 4</b>	<b>64</b>
		<b>68</b>		<b>106</b>

**Tabelle 4.1**  
**Verlustanzahl „ $T_v$ “ zwischen 2 benachbarten Gewinnen**

Durchschnittliche Wahrscheinlichkeit des Gewinnes  $p_{ds} = 9,85\%$

Modalwert  $\xi_t = 2$

Man gewinnt durchschnittlich jedes zehnte Spiel. Die durchschnittliche Gewinnhöhe beträgt 1050 (11). Das sind 87,79% der maximal möglichen Größe

$$Z_{max} = 1196$$

und tritt mit einer Wahrscheinlichkeit

$$P_x = 7,28\% \quad \text{auf.}$$

$Z = 1120$  ist der höchste Gewinn aus den Stichprobe für  $N= 481$ . Dies sind 93,65% der maximal möglichen Größe und tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$P_{max} = 1,04\% \quad \text{auf.}$$

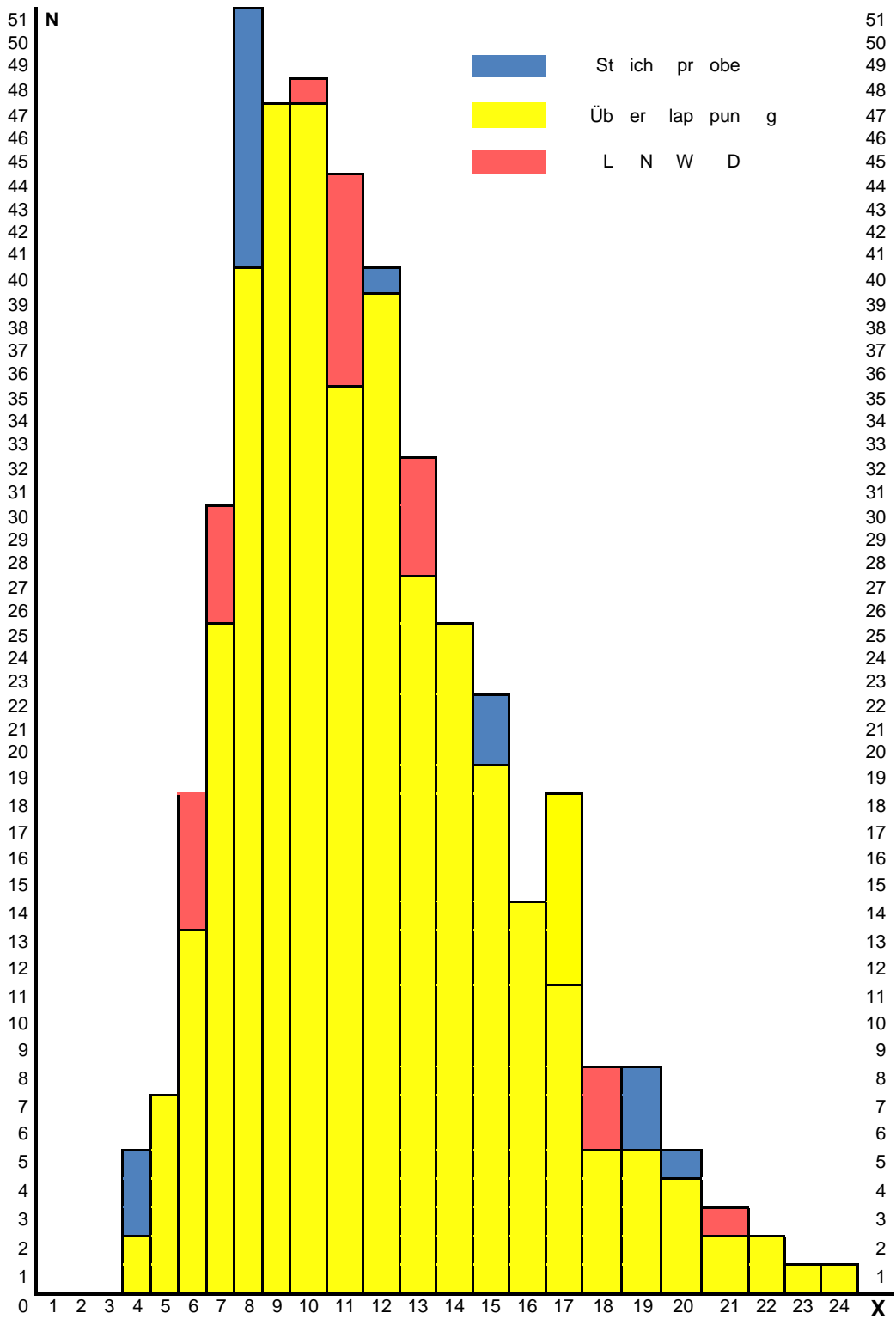
$Z_{min}= 860$  ist der kleinste Gewinn aus  $N= 481$ . Das sind 71,91% von maximal möglicher Größe. Die Menge von Gewinnen übersteigende Modalwert ist nur 10,4% von allen Gewinne und tritt mit einer Wahrscheinlichkeit 1,02% auf.

Der **Graphik 4.1** zeigt die Verteilung der Verlust-Menge  $T_v$  zwischen 2 benachbarte Gewinne der Stichprobe  $N$ . Der Graphik hat auch eine sehr deutliche Schiefe und könnte mit einer Lognormalverteilung approximiert werden.

**Tabelle 4.2** zeigt die Parametern der Verlust-Stichprobe zwischen den letzten  $N=145$  Gewinne. Man kann sehen, dass mit der Erfahrung die Standardabweichung und der Pearson Schiefewert kleiner werden, es verkleinert sich auch das Erwartungswert der Verlustanzahl  $\xi_v$ .

N	D	Dx	Kv	&	$\sigma$	$\xi$
106	3	27,981	0,851	0,608	5,29	6,22
145	3	27,717	0,895	0,548	5,265	5,88

**Tabelle 4.2**  
**Wichtigste Charakteristiken von der Verlust-Stichprobe**



**Graphik 2.1**  
Lognormalverteilung (Var.1)



Stichprobe N		Variant 2			Variant 1		
korrig.	original	LNWD	$\Delta_{orig}$	$\Delta_{korrig}$	LNWD	$\Delta_{orig}$	$\Delta_{korrig}$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
5	5	6	0	0	2	3	3
8	8	22	0	0	9	0	0
15	15	41	0	0	21	0	0
29	29	56	0	0	36	0	0
54	54	62	0	0	49	5	5
51	51	61	0	0	56	0	0
50	50	53	0	0	57	0	0
50	42	44	0	6	53	0	0
42	50	35	15	7	46	4	0
34	34	27	7	7	38	0	0
33	33	20	13	13	30	3	3
31	31	15	16	16	23	8	8
22	16	11	7	11	17	0	5
16	22	8	14	8	13	9	3
10	8	5	3	5	9	0	1
8	10	4	6	4	7	3	1
8	7	3	4	5	5	2	3
7	8	2	6	5	3	5	2
2	2	1	1	1	2	0	0
2	2	1	1	1	2	0	0
2	2	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
(2)	(2)	0	0	0	0	0	0
<b>479</b> <b>(481)</b>	<b>479</b> <b>(481)</b>	<b>479</b>	<b>94</b> <b>81</b>	<b>90</b> <b>77</b>	<b>479</b>	<b>43</b> <b>35</b>	<b>35</b> <b>29</b>
<b>19,75%</b> <b>(20,05%)</b>		$\epsilon_{VI} =$ $\epsilon_{KI} =$	<b>80,38%</b> <b>82,31%</b>	<b>81,21%</b> <b>83,19%</b>	$\epsilon_{VI} =$ $\epsilon_{KI} =$	<b>91,02%</b> <b>92,36%</b>	<b>92,69%</b> <b>93,67%</b>
	<b>(N = 400)</b> „	$\Delta_{VI} =$ $\Delta_{KI} =$	<b>63</b> <b>54</b>			<b>29</b> <b>25</b>	
	„	$\epsilon_{VI} =$ $\epsilon_{KI} =$	<b>84,25%</b> <b>85,83%</b>	<b>- 3,87%</b> <b>- 3,52%</b>		<b>93,50%</b> <b>93,44%</b>	<b>- 1,73%</b> <b>- 1,12%</b>

**Tabelle 3.1**  
**Dynamik der Änderungen vom Qualität des Approximation ( $\epsilon$ )**  
**aus der Lognormalverteilung am Wachstum der Stichprobe**

### Literature-Verzeichnis

1. L.Sachs u. J.Hedderich "Angewandte Statistik", Springer, Berlin 2006
2. Г.А.Корн и Т.М.Корн "Справочник по математике", Изд. Наука, М., 1977
- 2a. G.A.Korn & T.M.Korn "Mathematical handbuch", McGraw-Hill BC, NY, 1968
3. В.С.Королюк и др. "Справочник по теории вероятностей и математической статистике " Изд. Наука, М., 1985
4. С.Уилкс "Математическая статистика " Изд. Наука, М., 1967